

4. Míry souvislosti grafu

Definice 4.1. Hrana $\{x, y\} \in H(G)$ se nazývá most grafu G , jestliže v grafu G neexistuje žádná kružnice, která ji obsahuje.

Tvrzení 4.1. Je-li graf G souvislý a hrana $\{x, y\}$ jeho most, pak graf $G - \{x, y\}$, vzniklý odstraněním hrany $\{x, y\}$ z G , je nesouvislý.

Věta 4.1. Má-li souvislý graf G most, pak má alespoň dva uzly lichého stupně.

Definice 4.2. Uzel $x \in U(G)$ je artikulace grafu G , jestliže existují hrany $\{x, y_1\}$ a $\{x, y_2\}$, které nepatří současně téže kružnici grafu G .

Definice 4.3. Bud' G graf, $G' \subset G$ jeho souvislý podgraf. Řekneme, že G' je blok grafu G , jestliže:

- a) G' nemá artikulaci,
- b) jestliže G'' je souvislý graf bez artikulace takový, že $G' \subset G'' \subset G$, pak $G'' = G'$.

Tvrzení 4.2. *Bud' G souvislý graf s alespoň dvěma hranami. Pak G nemá artikulaci, právě když pro každé dvě jeho hrany existuje kružnice, na níž obě leží.*

Důsledek 4.1. *Pro každé dvě hrany bloku, který není mostem, existuje kružnice, na níž obě leží.*

Věta 4.2. *Bud'te G_1, G_2 dva bloky grafu G . Pak buďto $G_1 = G_2$, nebo G_1 a G_2 nemají žádnou společnou hranu.*

Definice 4.4. *Bud' G souvislý graf, B_1, \dots, B_r všechny jeho bloky a x_1, \dots, x_s všechny jeho artikulace. Graf $B(G)$, definovaný předpisem*

$$U(B(G)) = \{x_1, \dots, x_s, B_1, \dots, B_r\},$$

$$H(B(G)) = \{\{a, b\} \mid \exists i, j \text{ tak, že } a = x_i, b = B_j \text{ a } x_i \in U(B_j)\},$$

se nazývá blokový graf grafu G .

Věta 4.3. *Pro každý souvislý graf G je blokový graf $B(G)$ stromem.*

Definice 4.5. *Bud' G souvislý graf a $x, y \in U(G)$ jeho uzly, $x \neq y$. Množina $B \subset H(G)$ taková, že*

- 1) *každá cesta z x do y obsahuje alespoň jednu hranu množiny B ,*
- 2) *žádná vlastní podmnožina množiny B nemá vlastnost 1),*

se nazývá hranový řez grafu G mezi uzly x a y .

Definice 4.6. *Nejmenší počet prvků hranového řezu mezi uzly x a y se nazývá hranový stupeň souvislosti grafu G mezi uzly x a y a značí se $h_G(x, y)$.*

Definice 4.7. *Bud' G souvislý graf a $x, y \in U(G)$ jeho uzly, $x \neq y$. Neprázdna množina $A \subset U(G)$ taková, že*

- 1) *každá cesta z x do y obsahuje alespoň jeden uzel z množiny A ,*
- 2) *žádná vlastní podmnožina množiny A nemá vlastnost 1),*

se nazývá uzlový řez grafu G mezi uzly x a y .

Definice 4.8. *Nejmenší počet prvků uzlového řezu, oddělujícího uzly x a y , se nazývá uzlový stupeň souvislosti grafu G mezi uzly x a y a značí se $u_G(x, y)$. Neexistuje-li uzlový řez mezi x a y , tj. jsou-li uzly x a y sousední, klademe $u_G(x, y) = |U(G)| - 1$.*

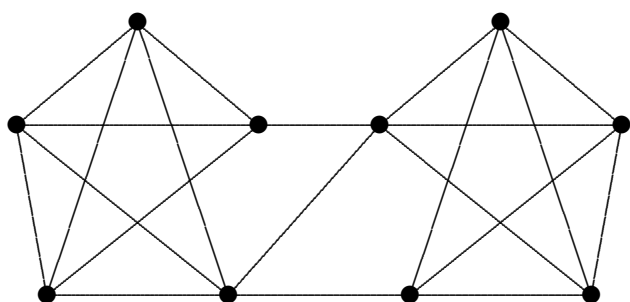
Definice 4.9.

- (i) Nejmenší z čísel $u_G(x, y)$ nazveme uzlový stupeň souvislosti grafu G a budeme je značit $u(G)$.
- (ii) Nejmenší z čísel $h_G(x, y)$ nazveme hranový stupeň souvislosti grafu G a budeme je značit $h(G)$.

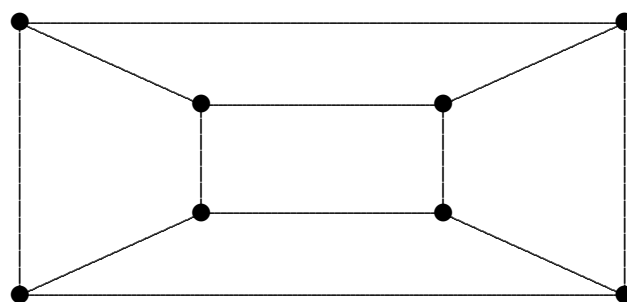
Řekneme, že graf G je uzlově (resp. hranově) k -souvislý, jestliže je $u(G) \geq k$ (resp. $h(G) \geq k$).

Věta 4.4. Pro každý graf G platí

$$u(G) \leq h(G) \leq \delta(G).$$



$$u(G) = 2, h(G) = 3, \delta(G) = 4$$



$$u(G) = h(G) = \delta(G) = 3$$

Věta 4.5. V každém grafu G s alespoň 2 uzly platí

$$h(G) \leq \frac{2|H(G)|}{|U(G)|}.$$

Věta 4.6 (Ford, Fulkerson). Graf G je hranově k -souvislý mezi uzly a a b , $a \neq b$, právě když v něm existuje k hranově disjunktních cest, vedoucích z a do b .

Věta 4.7 (Menger). Graf G je uzlově k -souvislý mezi nesousedními uzly a a b , právě když v něm existuje k uzlově disjunktních cest, vedoucích z a do b .

Konstrukce sítě \vec{G} :

$$U(\vec{G}) = \{(x, i) \mid x \in U(G), i = 1, 2\},$$

$$H(\vec{G}) = \{((x, 1), (x, 2)) \mid x \in U(G)\} \cup \{((x, 2), (y, 1)) \mid \{x, y\} \in H(G)\}.$$

Propustnosti hran:

u hran typu $((x, 1), (x, 2))$ položíme propustnost rovnu jedné,

u hran druhého typu (tj. $((x, 2), (y, 1))$) bude propustnost nekonečná.

Zdrojem je uzel $(a, 2)$, stokem je uzel $(b, 1)$.

