

6. Nezávislost, dominance, klikovost a jádro grafu

6.1. Neorientované grafy

Definice 6.1. Množina $A \subset U(G)$ se nazývá nezávislá množina grafu G , jestliže žádné dva uzly množiny A nejsou spojeny hranou.

Definice 6.2. Nezávislost grafu G (značíme $\alpha(G)$) je největší počet prvků nezávislé množiny grafu G .

Definice 6.3. Množina $B \subset U(G)$ se nazývá (uzlové) pokrytí grafu G , jestliže pro každou hranu $\{x, y\} \in H(G)$ je $x \in B$ nebo $y \in B$.

Definice 6.4. Pokrývací číslo grafu G (značíme $\beta(G)$) je počet prvků nejmenšího pokrytí grafu G .

Věta 6.1. Množina $A \subset U(G)$ je nezávislá právě když $B = U(G) \setminus A$ je pokrytí G .

Důsledek 6.1. Pro každý graf G platí

$$\alpha(G) + \beta(G) = |U(G)|.$$

Věta 6.2 (Chvátal, Erdős). Necht' G je k -souvislý graf ($k \geq 2$) s $\alpha(G) \leq k$. Pak je G hamiltonovský.

Věta 6.3 (Dirac). Necht' G je k -souvislý graf ($k \geq 2$). Pak pro každou množinu $M \subset U(G)$, $|M| \leq k$, existuje v grafu G kružnice C taková, že $M \subset U(C)$.

Definice 6.5. Podgraf $K \subset G$ se nazývá klika grafu G , jestliže

- a) K je úplný podgraf
- b) jestliže $K \subset K' \subset G$ a K' je úplný podgraf, pak $K = K'$.

Definice 6.6. Klikovost grafu (značíme $\omega(G)$) je největší počet uzlů kliky grafu G .

Definice 6.7. Necht' G je graf. Potom graf

$$\bar{G} = \left(U(G), \binom{U(G)}{2} \setminus H(G) \right)$$

se nazývá doplněk grafu G .

Věta 6.4. Necht' G je graf. Pak

$$\alpha(G) = \omega(\bar{G}).$$

Definice 6.8. Množina $B \subset U(G)$ se nazývá dominantní množina grafu G , jestliže pro každý uzel $x \notin B$ existuje uzel $y \in B$ takový, že $\{x, y\} \in H(G)$.

Definice 6.9. Počet prvků nejmenší dominantní množiny grafu G se nazývá číslo dominance grafu G a značí se $\gamma(G)$.

Věta 6.5. Necht' $A \subset U(G)$ je nezávislá množina grafu G . Pak A je maximální nezávislá množina právě když A je dominantní.

Věta 6.6. Každá maximální nezávislá množina je minimální dominantní množina grafu G .

Důsledek 6.2. Pro každý graf G platí $\gamma(G) \leq \alpha(G)$.

Definice 6.10. Množina uzlů $C \subset U(G)$, která je současně nezávislá i dominantní, se nazývá jádro grafu G .

Věta 6.7. Každý neorientovaný graf má jádro.

Poznámka. Úloha zjistit, zda v daném grafu existuje nezávislá množina předeepsané velikosti, je NP-úplný problém.

Algoritmus (maximální nezávislá množina v grafu).

1. $X := \emptyset$, $Y := U(G)$.
2. Dokud je $Y \neq \emptyset$, prováděj operaci (3):
3. Zvol $x \in Y$,
 polož $X := X \cup \{x\}$,
 z Y vynech x a všechny uzly s ním sousední.

6.2. Jádro orientovaného grafu

Definice 6.11. *Bud' \vec{G} orientovaný graf. Říkáme, že množina $A \subset U(\vec{G})$ je nezávislá, jestliže žádné dva její uzly nejsou spojeny hranou.*

Definice 6.12. *Bud' \vec{G} orientovaný graf, $C \subset U(\vec{G})$. Množina C se nazývá jádro grafu \vec{G} , jestliže*

- (i) C je nezávislá množina,*
- (ii) pro každý $x \in U(\vec{G}) \setminus C$ existuje $y \in U(C)$ tak, že $(x, y) \in H(\vec{G})$.*

Věta 6.8. *Každý acyklický graf má jádro.*

Věta 6.9. *Každý orientovaný graf bez cyklů liché délky má jádro.*